1. Funkce

Definice 1.1. *Zobrazení f nazýváme* reálná funkce, *jestliže $H(f) \subset \mathbb{R}$.*

Další specifikaci můžeme provést podle definičního oboru zobrazení.

Definice 1.2. *Reálná funkce f se nazývá*

(1) funkce jedné reálné proměnné, *jestliže $D(f) \subset \mathbb{R}$, tedy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,* [1]
(2) posloupnost[2], *jestliže $D(f) = \mathbb{N}$, tedy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,*
(3) funkce n reálných proměnných, *jestliže $D(f) \subset \mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, tedy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

(1) analyticky předpisem $y = f(x)$,
(2) grafem,
(3) tabulkou hodnot.

Definice 1.3. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak*

(1) součet funkcí $f + g$ *znamená:*
$$\forall x \in (D(f) \cap D(g)) : (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
(2) rozdíl funkcí $f - g$ *znamená:*
$$\forall x \in (D(f) \cap D(g)) : (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$
(3) součin funkcí $f.g$ *znamená:*
$$\forall x \in (D(f) \cap D(g)) : (f.g)(x) = f(x).g(x),$$
(4) podíl funkcí $\frac{f}{g}$ *znamená:*
$$\forall x \in (D(f) \cap \{x \in D(g) | g(x) \neq 0\}) : (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$
(5) absolutní hodnota funkce $|f|$ *znamená:*
$$\forall x \in (D(f) : |f|(x) = |f(x)|,$$
(6) mocnina funkce f^g *znamená:*
$$\forall x \in (D(g) \cap \{x \in D(f) | f(x) > 0\}) : (f^g)(x) = f(x)^{g(x)}.$$

1.1. Globální vlastnosti.

Definice 1.4. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce f je na množině $\mathbf{M}$*

(1) rostoucí, *právě když*
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{M} : (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)),$$
(2) neklesající, *právě když*
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{M} : (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)),$$
(3) klesající, *právě když*
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{M} : (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)),$$
(4) nerostoucí, *právě když*
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{M} : (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Pokud má funkce některou z těchto vlastností, říkáme, že je monotonní *na $\mathbf{M}$. Je-li funkce rostoucí nebo klesající, říkáme také, že je* ryze monotonní *na $\mathbf{M}$.*

Pokud je $\mathbf{M} = D(f)$, budeme krátce říkat, že funkce je rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí, monotonní nebo ryze monotonní.

Věta 1.1. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{M} \subset D(f)$. Je-li f ryze monotonní na množině $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}$, je na množině $\mathbf{M}$ prostá.*

Věta 1.2. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí (klesající), pak existuje f^{-1} je také rostoucí (klesající).*

---

[1] Budeme používat tento zápis, i když bychom správně měli psát $f : D(f) \to \mathbb{R}$.

[2] Posloupnost se obvykle zapisuje, jako množina $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. V souladu s tímto značením budeme pro posloupnost raději používat zápis $\{\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nebo $\{\} : n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$.

Definice 1.5. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $\mathbf{M} \subset D(f)$*. Říkáme, že funkce* f *je*

(1) sudá *na množině* $\mathbf{M}$*, právě když*

$$\forall x \in \mathbf{M} : (-x) \in \mathbf{M} \wedge f(x) = f(-x),$$

(2) lichá *na na množině* $\mathbf{M}$*, právě když*

$$\forall x \in \mathbf{M} : (-x) \in \mathbf{M} \wedge f(x) = -f(-x),$$

(3) p-periodická *na množině* $\mathbf{M}$ *s periodou* $p \in \mathbb{R}$*, právě když*

$$\forall x \in \mathbf{M} : x + p \in \mathbf{M} \wedge x - p \in \mathbf{M} \wedge f(x + p) = f(x - p) = f(x).$$

Pokud $\mathbf{M} = D(f)$, říkáme krátce, že funkce je sudá, lichá nebo p-periodická.

Definice 1.6. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}$*. Obraz množiny* $\mathbf{M}$ *při funkci* f *nazýváme množinu*

$$f(\mathbf{M}) = \{y \in \mathbb{R} | y = f(x) \wedge x \in \mathbf{M}\}.$$

Definice 1.7. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbf{M} \subset D(f)$*. Říkáme, že* f *je na množině* $\mathbf{M}$

(1) omezená shora*, právě když*

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbf{M} : x \leq K,$$

(2) omezená zdola*, právě když*

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbf{M} : x \geq k.$$

Pokud je funkce omezená zdola i shora, říkáme, že je na množině $\mathbf{M}$ omezená.
Dále říkáme, že f *má v bodě* $a \in \mathbf{M}$

(3) maximum *na množině* $\mathbf{M}$*, právě když*

$$\forall x \in \mathbf{M} : f(x) \leq f(a) \text{ a píšeme } f(a) = \max_{x \in \mathbf{M}} f(x),$$

(4) minimum *na množině* $\mathbf{M}$*, právě když*

$$\forall x \in \mathbf{M} : f(x) \geq f(a) \text{ a píšeme } f(a) = \min_{x \in \mathbf{M}} f(x).$$

1.2. **Funkce absolutní hodnota.**

$$f : y = |x|, x \in \mathbb{R}.$$

$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle 0, \infty)$. Je to sudá funkce, klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na $\langle 0, \infty)$. Je zdola omezená.

1.3. **Funkce signum.**

$$f : y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \{-1, 0, 1\}$. Je to lichá funkce a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|x| = x.\operatorname{sign} x$ a $x = |x|.\operatorname{sign} x$. Je omezená. Tato funkce vlastně poskytuje znaménko reálného čísla. Pro kladné hodnoty se znaménkem "+" dává číslo 1. Pro nulu, která nemá znaménko, dává hodnotu 0. Nakonec pro záporná čísla se znaménkem "$-$" dává hodnotu -1.

1.4. **Funkce celá část čísla.**

$$f : y = [x], x \in \mathbb{R}.$$

Přičemž symbol celá část reálného čísla $[x]$ je pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ definován takto: pro $p \in \mathbb{Z}, p \leq x < p+1$ je $[x] = p$. Pokud bychom chtěli tento zápis formulovat populárně slovy, mohli bychom např. říci, že $[x]$ zaokrouhluje dolů na celá čísla. Je $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{Z}$.

1.5. **Dirichletova funkce.**

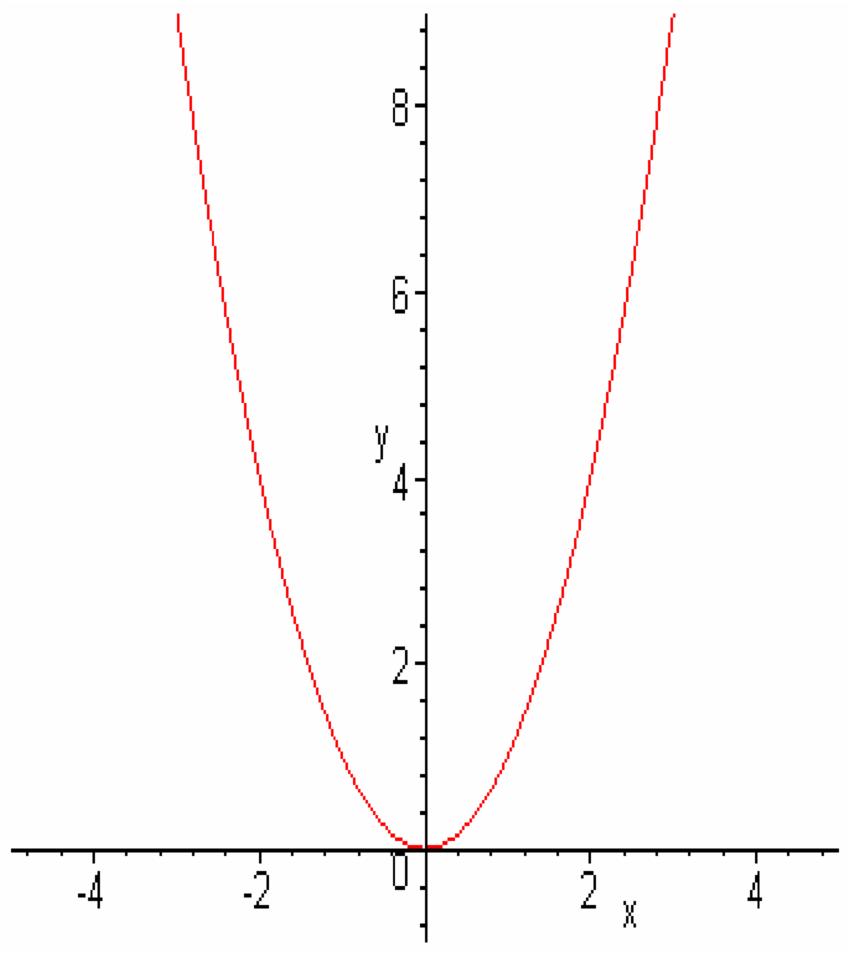
$$f : y = D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Platí $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \{0, 1\}$. Je to sudá funkce.

Lineární funkce

- f: $y=ax+b$
- grafem je přímka
- $a>0$, f je rostoucí
- $a<0$, f je klesající
- $a=0$, f je konstantní funkce $y=b$.

Mocninné funkce

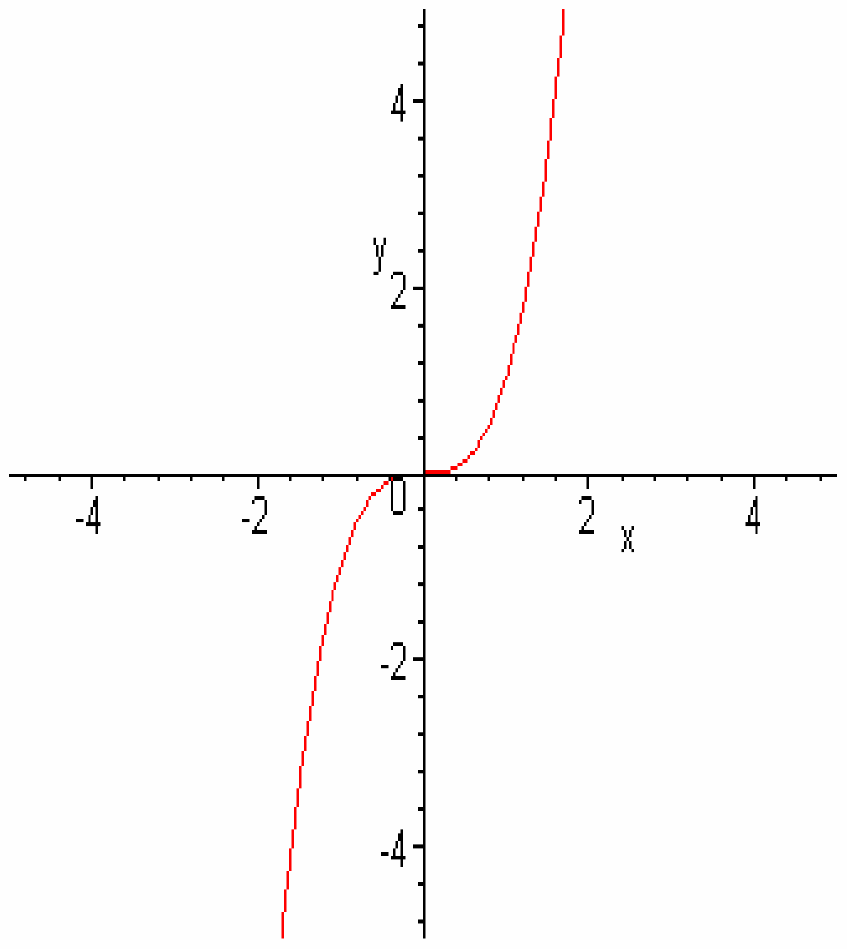


- Funkce kvadratická

$$f: y = x^2,$$
$$D(f) = R,$$
$$H(f) = \langle 0, \infty).$$

- Sudá mocnina
- Sudá funkce

Mocninné funkce

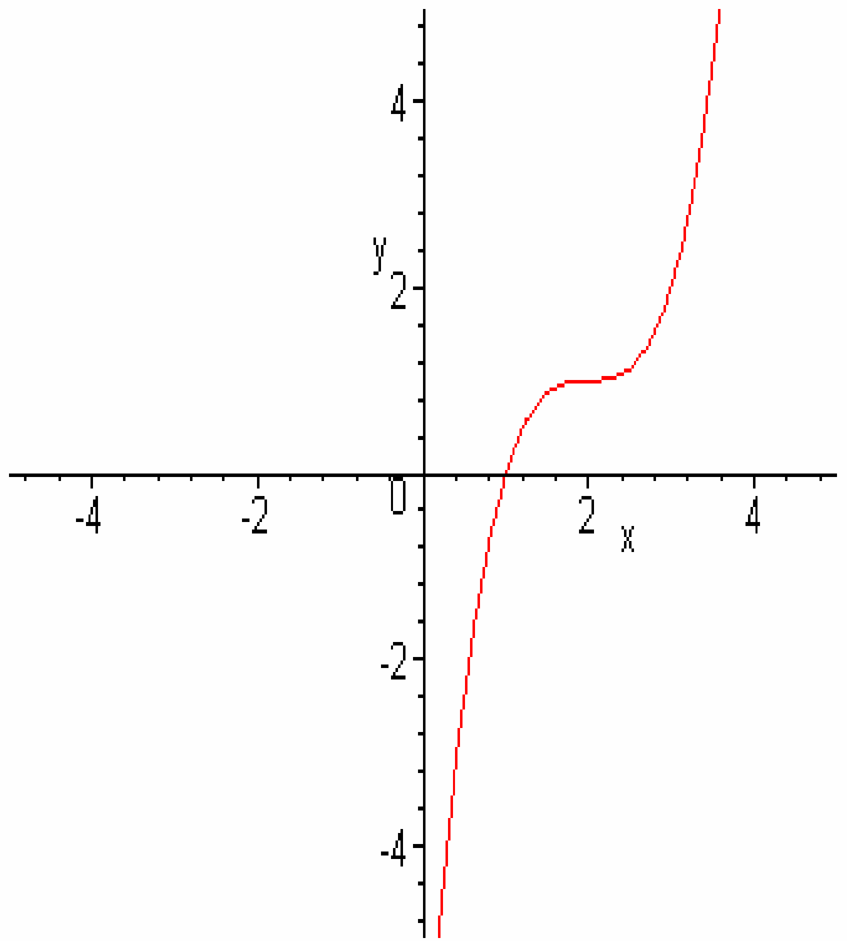


- Funkce třetí mocnina

$$f: y = x^3,$$
$$D(f) = R,$$
$$H(f) = R$$

- Lichá mocnina
- Lichá funkce

Mocninné funkce

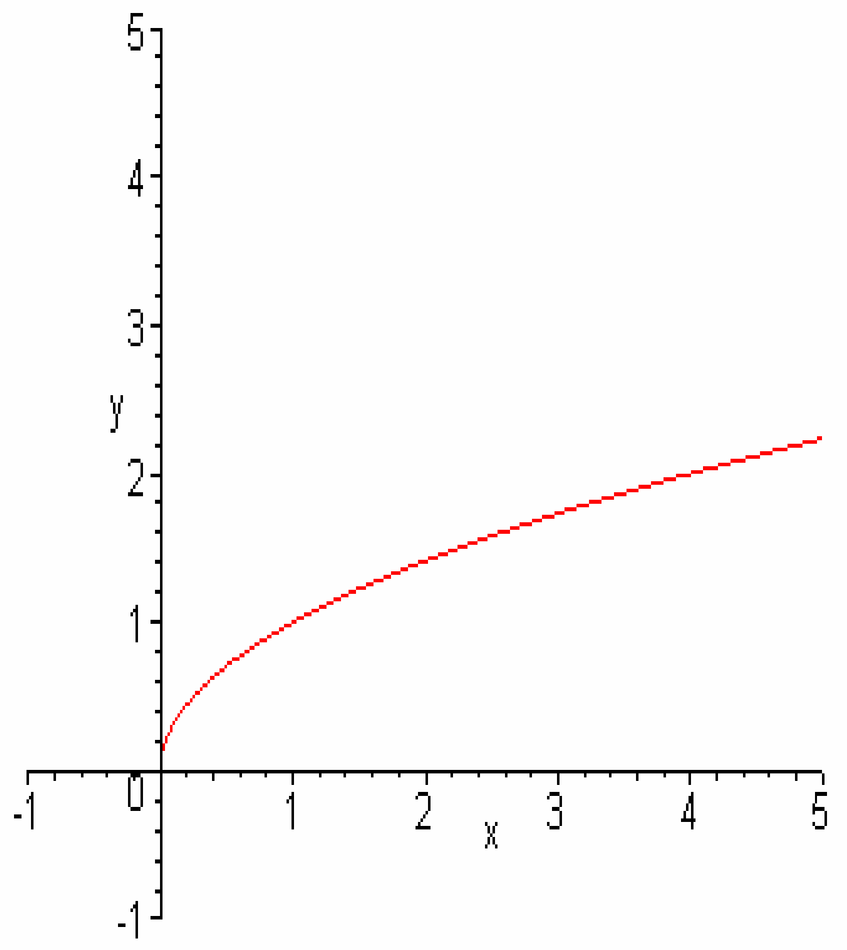


- Funkce třetí mocnina

$$f: y = (x-2)^3 + 1;$$
$$D(f) = R;$$
$$H(f) = R.$$

- S posunutím do bodu [2, 1]

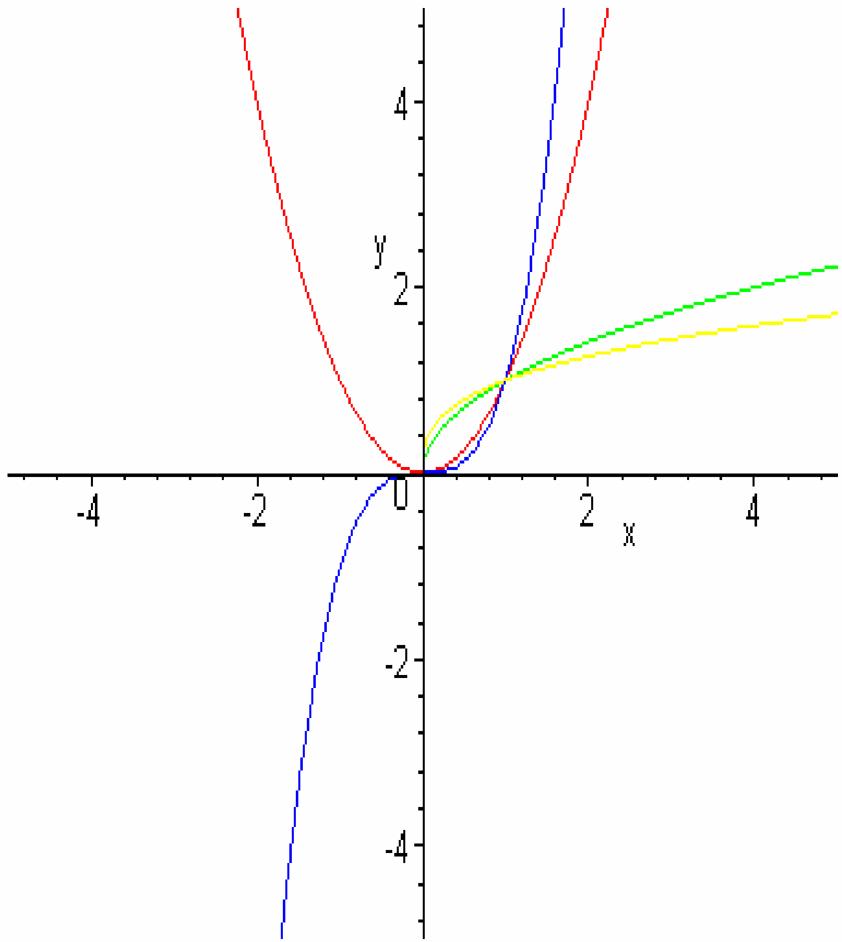
Mocninné funkce



- Funkce odmocnina

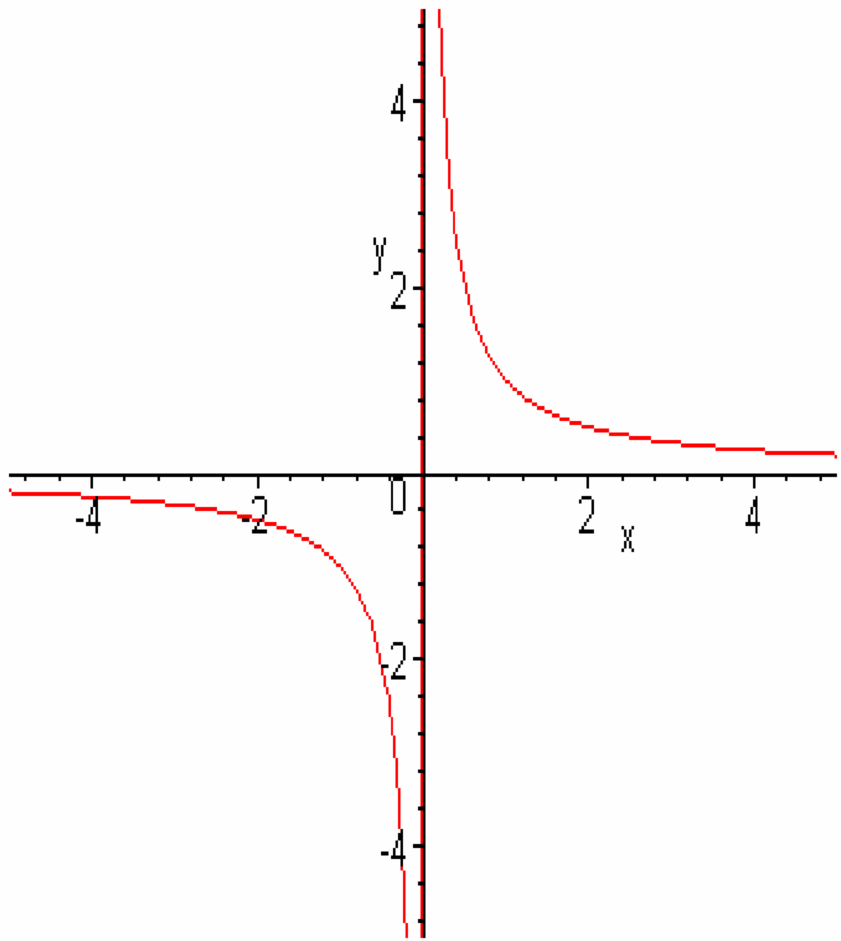
$$f : y = \sqrt{x},$$
$$D(f) =< 0, \infty),$$
$$H(f) =< 0, \infty).$$

Srovnání grafů mocninných funkcí



- Červená je druhá mocnina
- Modrá je třetí mocnina
- Zelená je druhá odmocnina
- Žlutá je třetí odmocnina

Mocninná funkce se záporným exponentem n=2k+1, k=1, 2,...

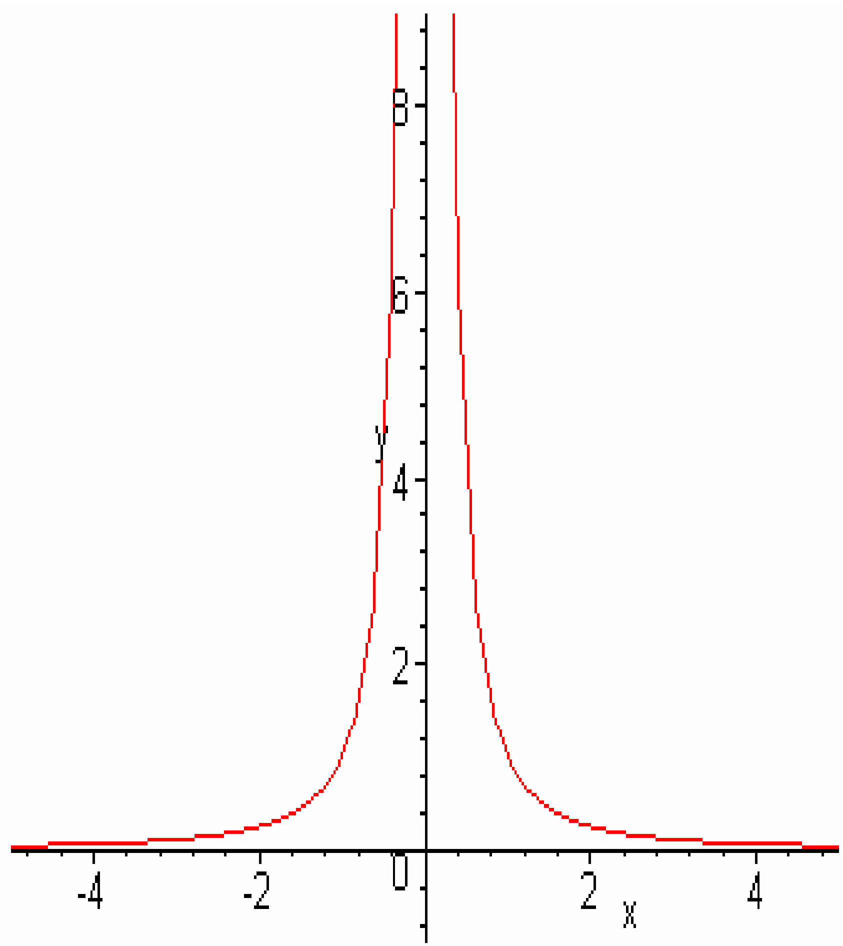


- Nepřímá úměrnost

$$f : y = x^{-1},$$
$$D(f) = R - \{0\},$$
$$H(f) = R - \{0\}.$$

- Lichá funkce

Mocninná funkce se záporným exponentem n=2k, k=1, 2, 3, …



$$f : y = x^{-2},$$
$$D(f) = R - \{0\},$$
$$H(f) = \langle 0, \infty).$$

- Sudá funkce

Polynomická funkce

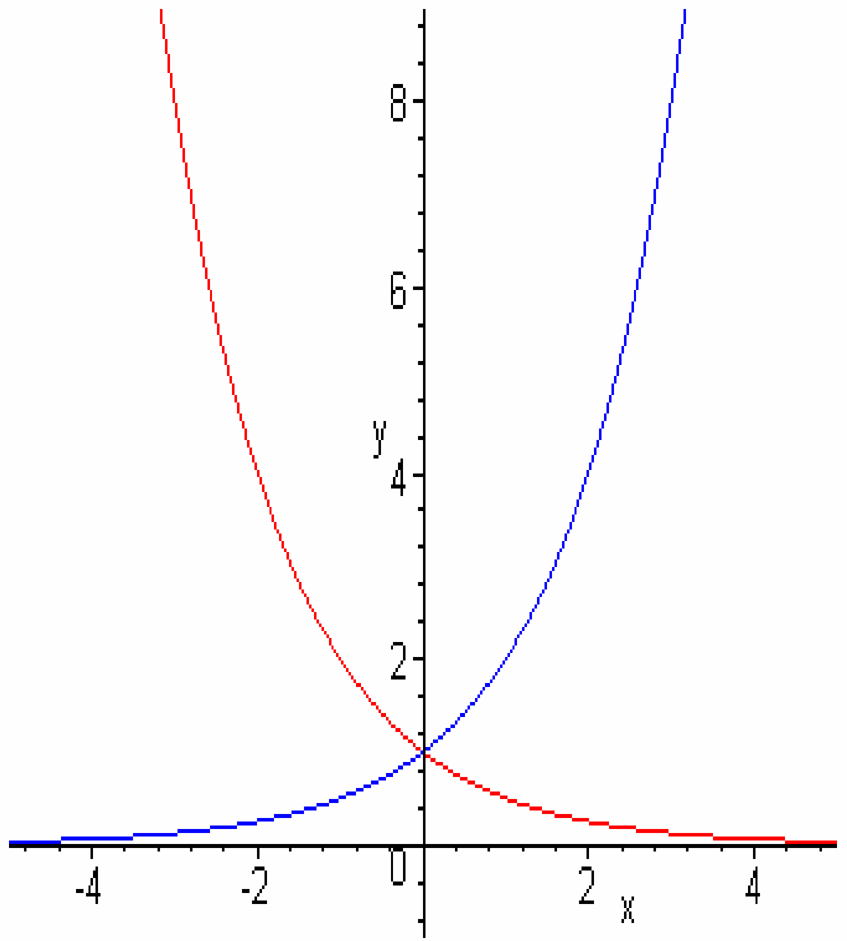
Je dána předpisem:

$$f : y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Kde $n \in N_0$. Je-li $a_n \neq 0$, nazývá se P(x)

polynomem stupně n.

Exponenciální funkce



- Modrý graf

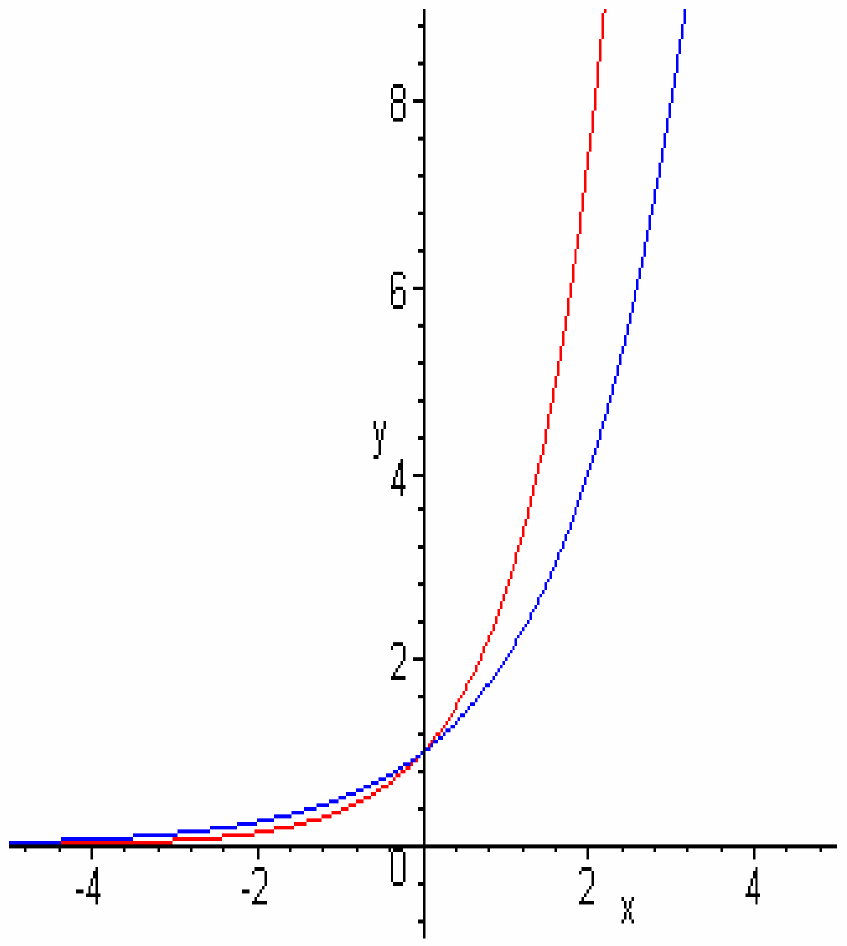
$$f : y = 2^x,$$
$$D(f) = R,$$
$$H(f) = < 0, \infty).$$

- Rostoucí funkce
- Červený graf

$$g : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

- Klesající funkce

Eulerovo číslo e=2,718281828459…



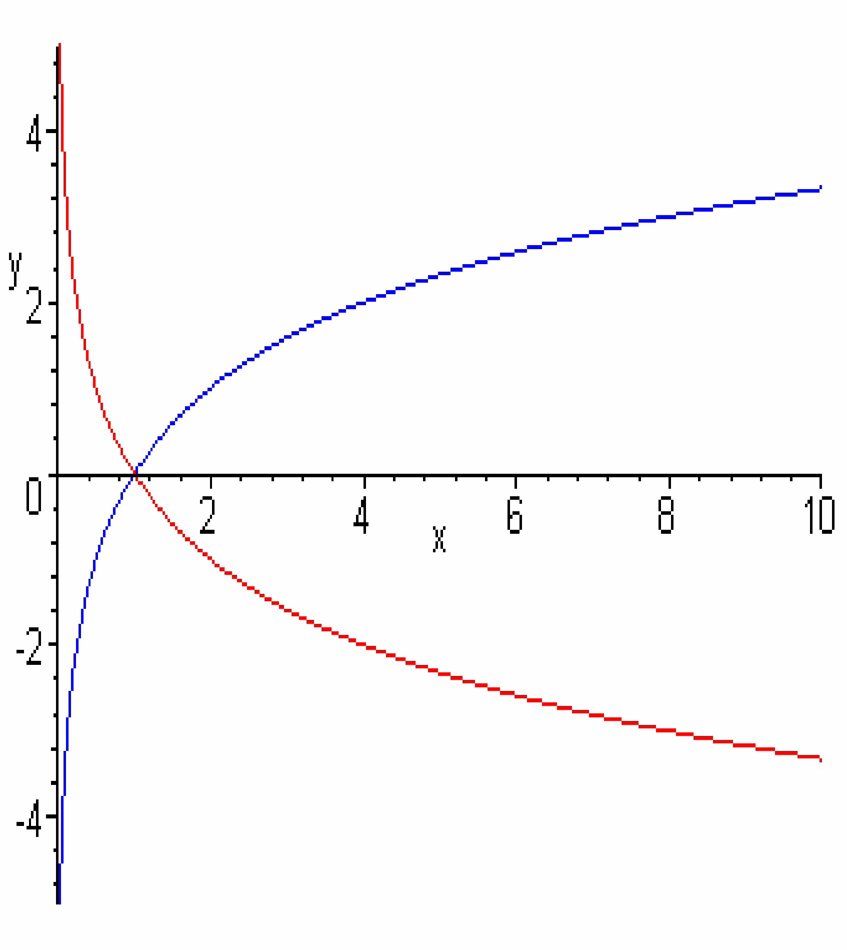
- Modrý graf

$$f : y = 2^x,$$

- Červený graf

$$g : y = e^x.$$

Logaritmická funkce



- Modrý graf

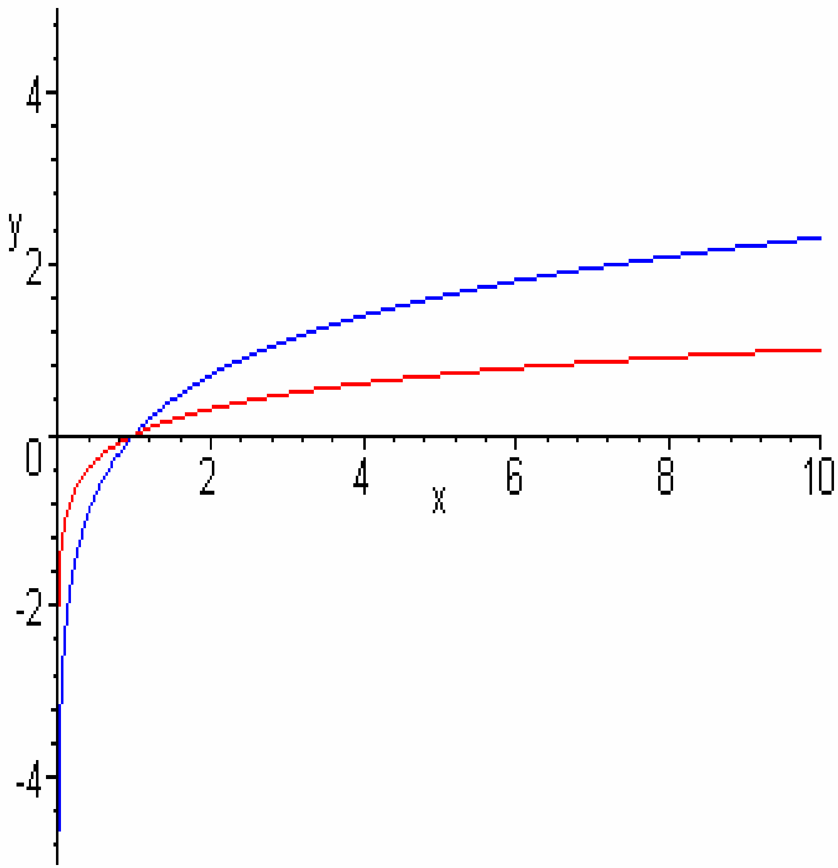
$$f : y = \log_2 x,$$
$$D(f) = (0, \infty),$$
$$H(f) = R.$$

- Rostoucí funkce
- Červený graf

$$g : y = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

- Klesající funkce

Oblíbené základy logaritmických funkcí



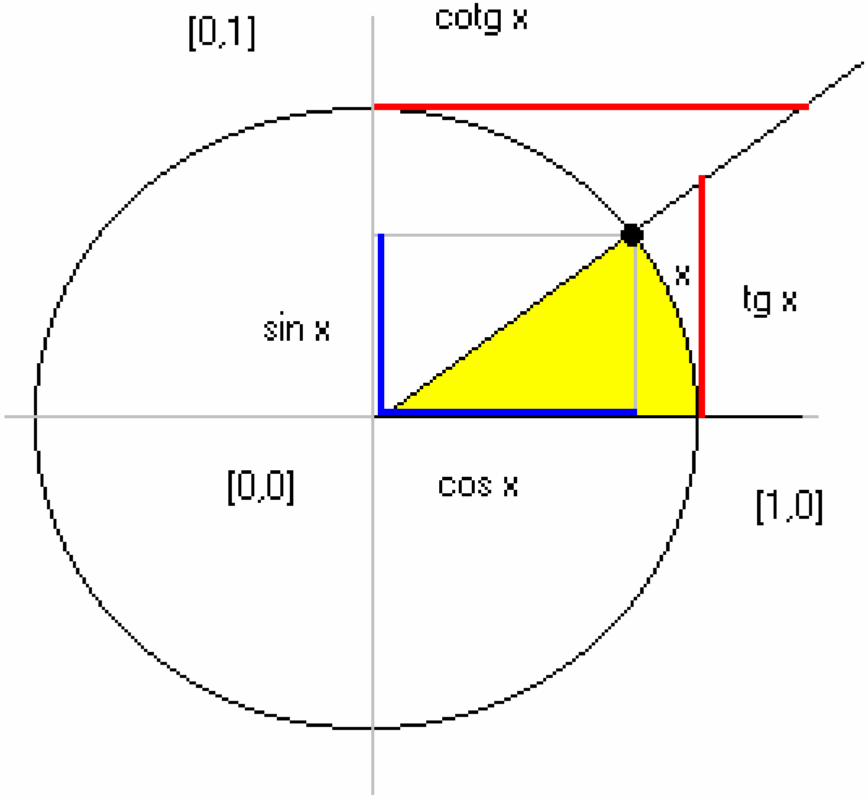
- Modrý graf-funkce přirozený logaritmus o základu e:

$$f: y = \ln x,$$

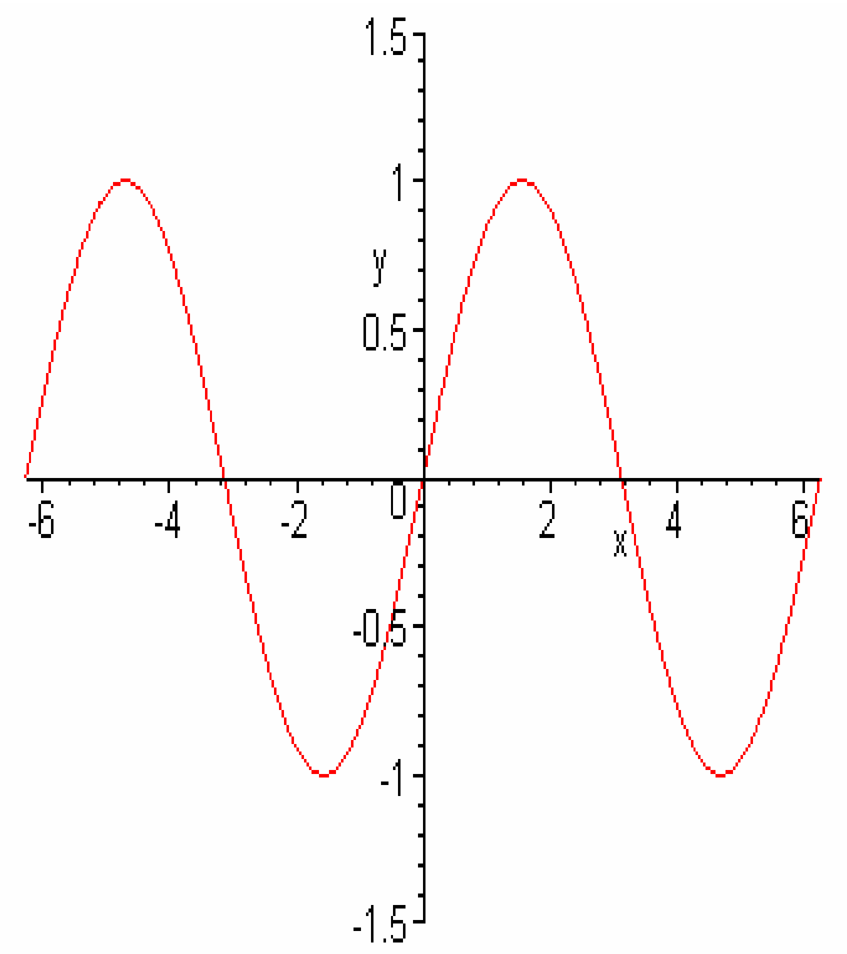
- Červený graf-funkce dekadický logaritmus o základu 10:

$$g: y = \log x.$$

Goniometrické funkce

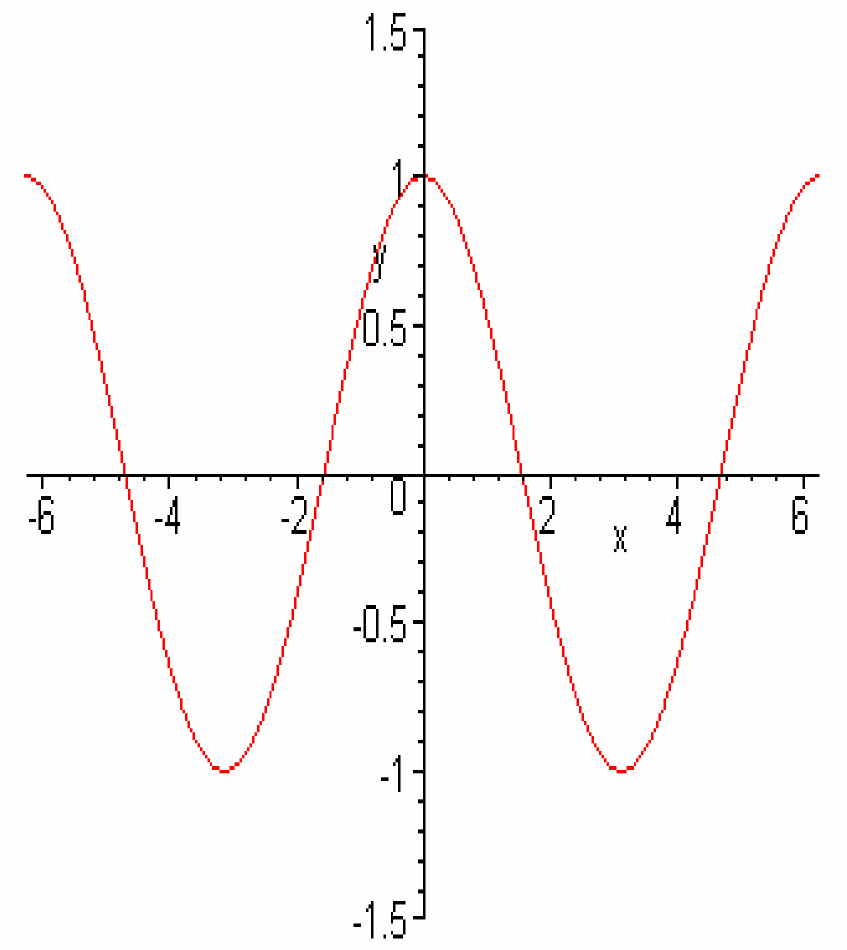


funkce sinus



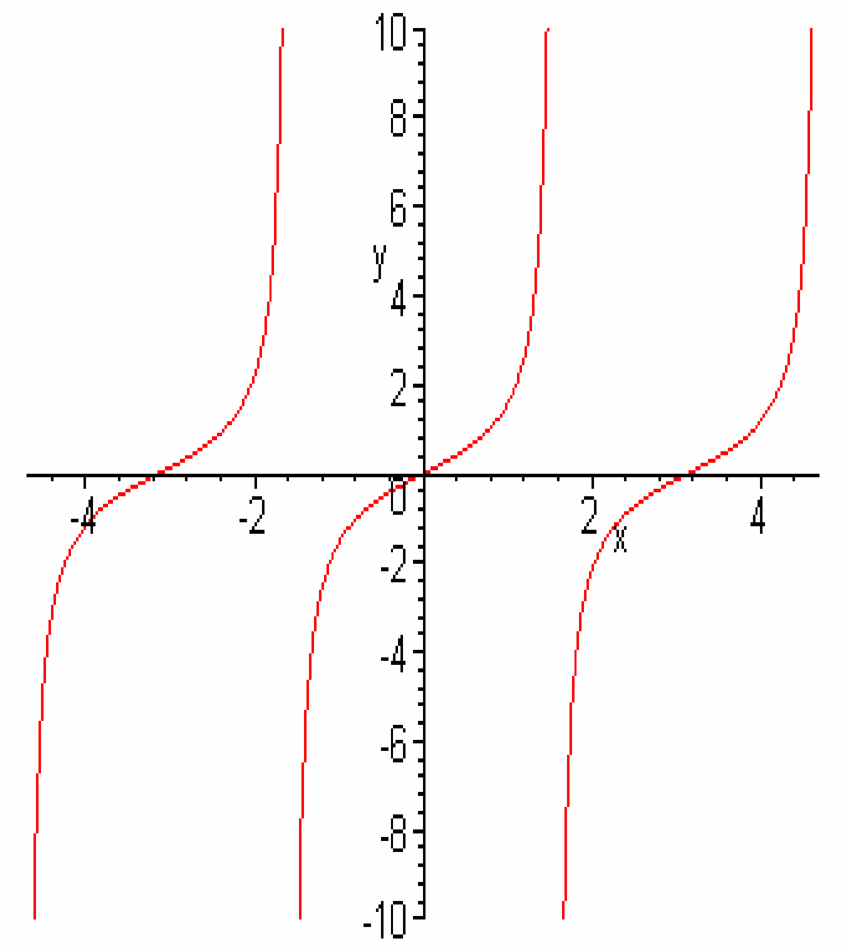
$$f: y = \sin x,$$
$$D(f) = R,$$
$$H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$

funkce kosinus



$$f : y = \cos x;$$
$$D(f) = R,$$
$$H(f) = < -1,1 > .$$

funkce tangens

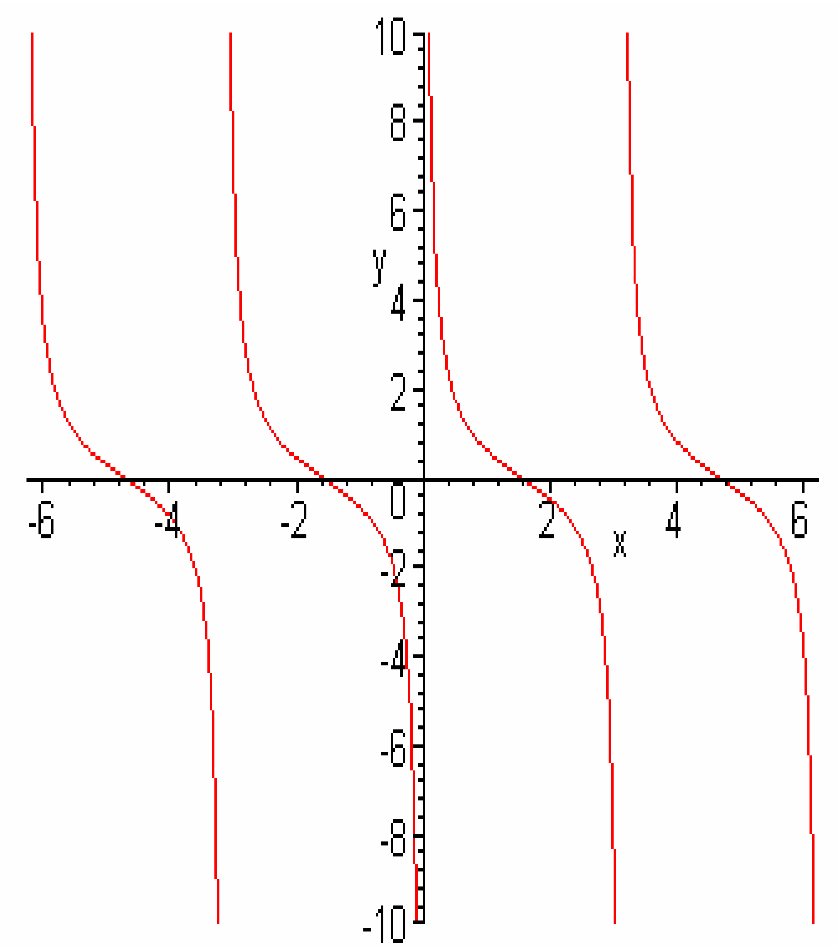


$$f : y = tgx,$$

$$D(f) = \bigcup_{k \in Z} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),$$

$$H(f) = R$$

funkce kotangens

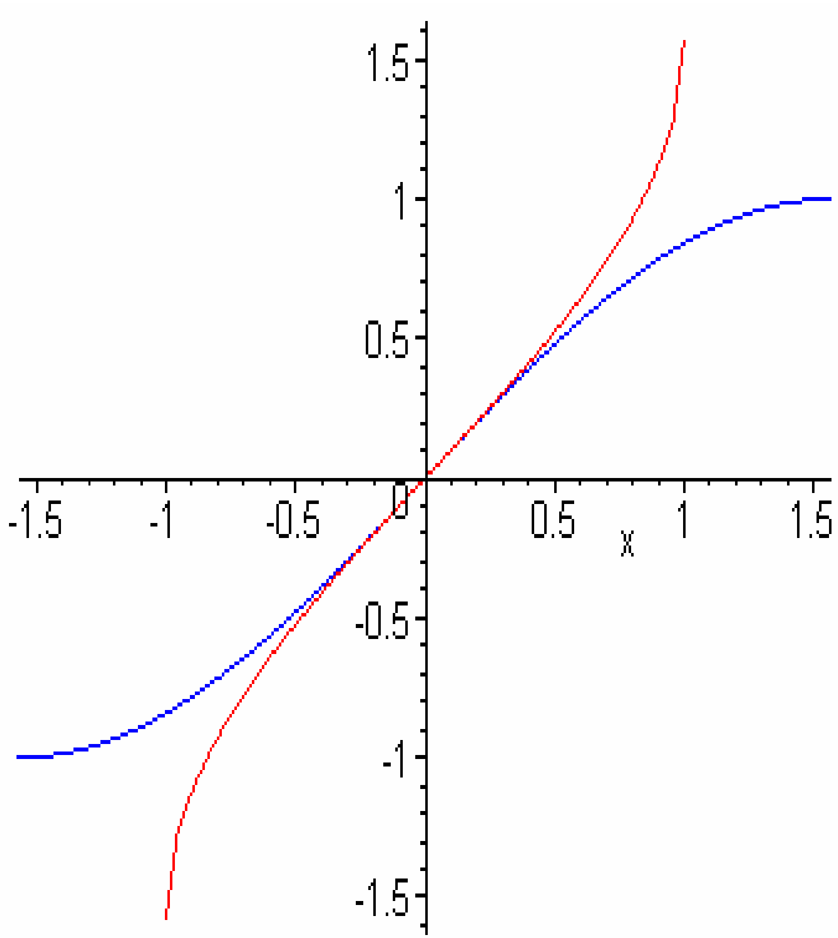


$$f: y = \cot g x,$$
$$D(f) = \bigcup_{k \in Z} (0 + k\pi, \pi + k\pi),$$
$$H(f) = R$$

Cyklometrické funkce

- Inverzní funkce k funkcím goniometrickým na intervalech, kde jsou tyto funkce prosté.

funkce arkussinus

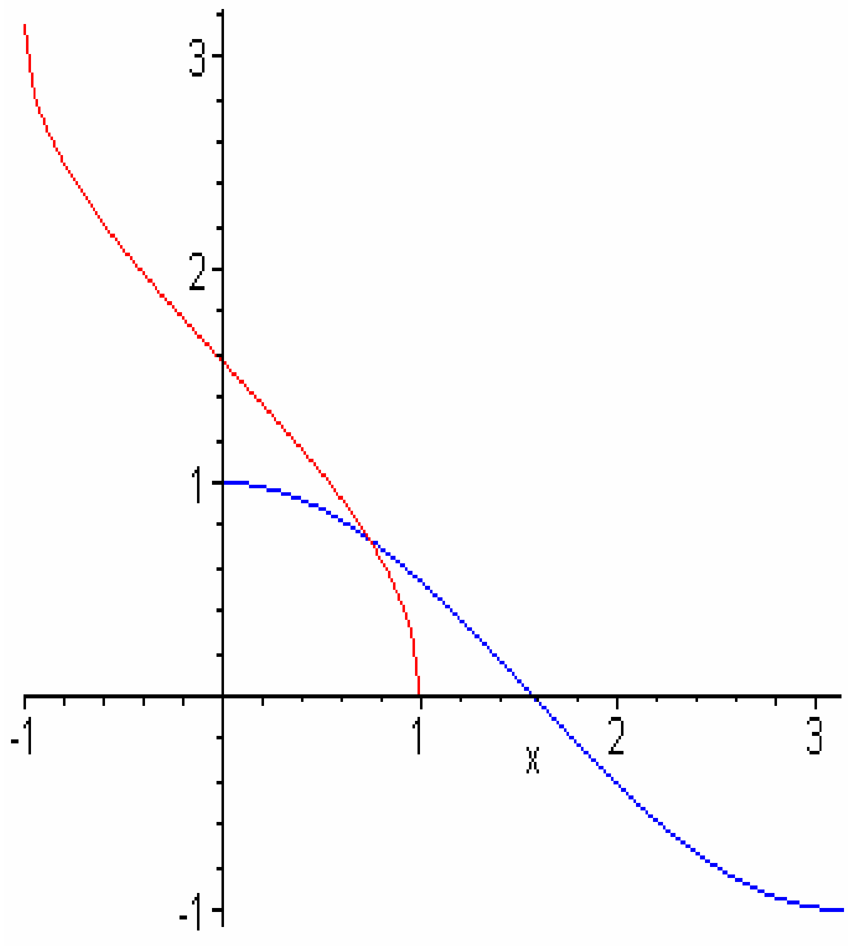


- Modrý graf je graf funkce sinus
- Červený graf

$$f : y = \arcsin x,$$
$$D(f) = \langle -1, 1 \rangle,$$
$$H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

- Rostoucí funkce

funkce arkuskosinus

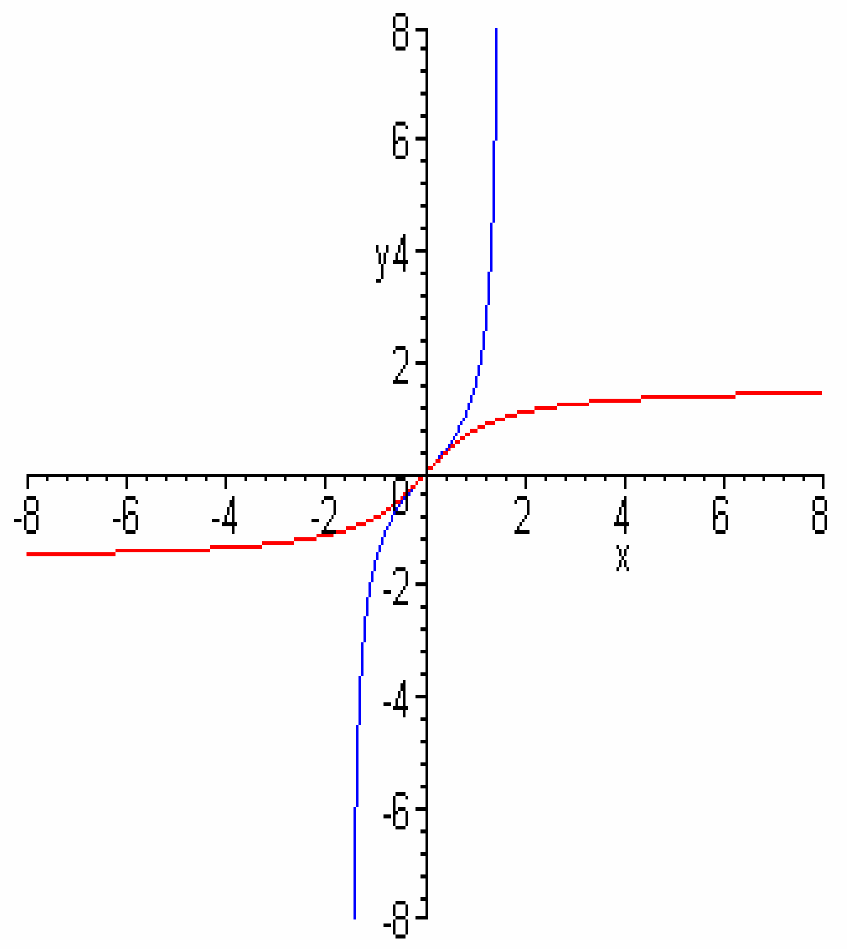


- Modrý graf je graf funkce kosinus
- Červený graf

$$f: y = \arccos x,$$
$$D(f) = <-1,1>,$$
$$H(f) = <0, \pi>.$$

- Klesající funkce

funkce arkustangens



- Modrý graf je graf funkce tangens
- Červený graf

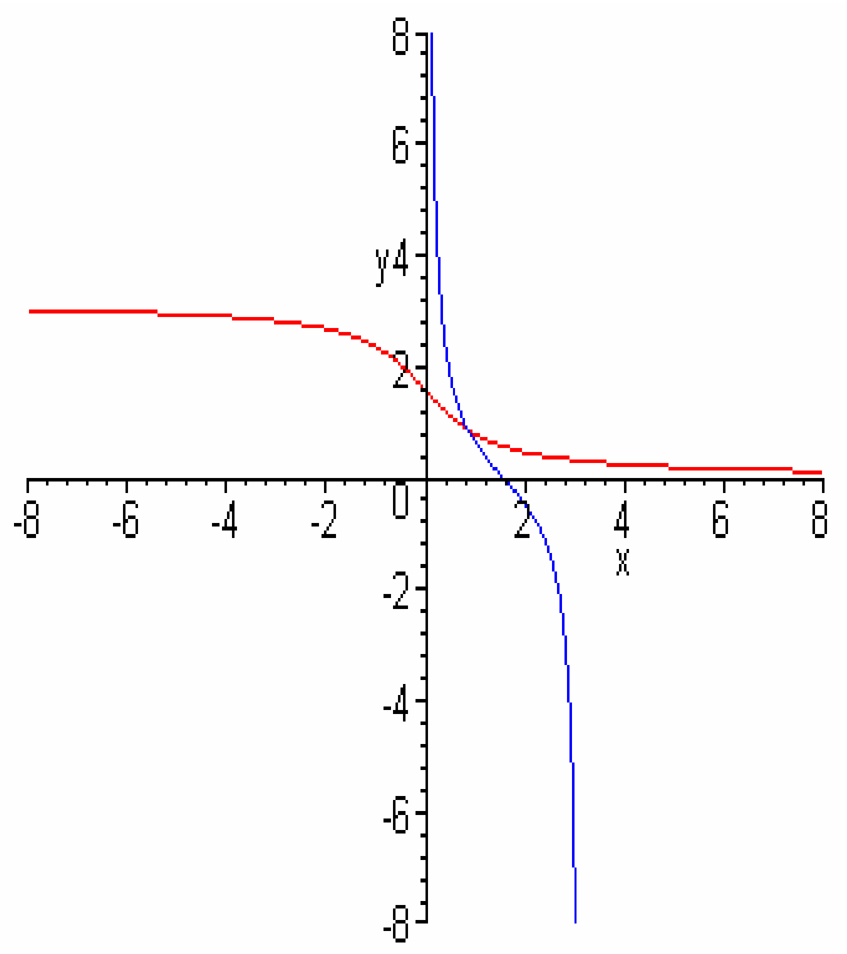
$$f : y = arctgx,$$

$$D(f) = R,$$

$$H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

- Rostoucí funkce

funkce arkukotangens



- Modrý graf je grafem funkce kotangens
- Červený graf

$$f: y = arc\cot gx,$$
$$D(f) = R,$$
$$H(f) = (0, \pi).$$

- Klesající funkce